数理解析研究所講究録
第 1568 巻 2007 年 81-86

Syzygies を用いた Noether 作用素計算アルゴリズム

田島慎一
SHINICHI TAJIMA
新潟大学工学部
FACULTY OF ENGINEERING, NIIGATA UNIV.
中村弥生
YAYOI NAKAMURA
近畿大学理工学部
SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINNERING, KINKI UNIV.

1 序

L. Ehrenpreis は, 60 年代の一連の論文において定数係数線形偏微分方程式系の一般論を展開し, 所謂, 基本原理を構築した. Noether 作用素と呼ばれるある種の偏微分作用素を用いて multiplicity variety の概念を導入し, 偏微分方程式系の特性多様体が重複度を持つような場合も一般的に扱う事の出来る壮大な理論を展開した ([2]). L. Ehrenpreis の導入した Noether 作用素の概念は一般の準素加群に対して定義されるが, 本稿では, 多項式環の準素イデアルに対する Noether 作用素について考える. ここで, (多項式環での) Noether 作用素の概念を思い出しておこう.

定理 ([2], [9]) 多項式環 $\mathbb{C}[z_1, z_2, ..., z_n]$ の準素イデアル I に対し, I に付随する素イデアル $\sqrt{I}$ を $\mathfrak{p}$ で表す. このとき多項式係数の線形偏微分作用素の組 $P_1, P_2, ..., P_\ell$ であり, 次を満たすものが存在する.
$h \in \mathbb{C}[z_1, z_2, ..., z_n]$ とする. このとき $P_1(h), P_2(h), ..., P_\ell(h) \in \mathfrak{p}$ は $h \in I$ となる必要十分である.

この定理にある条件を満たすような偏微分作用素の組 $P_1, P_2, ..., P_\ell$ のことを, 準素イデアル I に付随した Noether 作用素と呼ぶ.

例 1 $I = \langle y^2, z^3\rangle \subset \mathbb{C}[x, y, z]$ とおく. 明らかに $\mathfrak{p} = \langle y, z\rangle$ であり,

$$\{1, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \frac{\partial^3}{\partial y\partial z^2}\}$$

は Noether 作用素をなす.

例 2 $I = \langle y^2, z^2, y - xz\rangle \subset K[x, y, z]$ とおく. $\mathfrak{p} = \langle y, z\rangle$ である.
Noether 作用素は

$$\{1, x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\}$$

で与えられる.

偏微分作用素を用いて準素イデアルの重複の仕方を記述することは極めて自然な考え方であり, 理論上重要であるのみならず, 具体的計算を行ったり解析を展開する際も有効である. 本稿では, これら Noether 作用素の algorithmic な構成法について考える.

2 Syzygy 計算

この節では, syzygies の計算を行うことで準素イデアルに付随する Noether 作用素を構成することが出来ることを示す.

いま 準素イデアル $I \subset \mathbb{C}[z_1, z_2, ..., z_n]$ の生成元 $g_1, g_2, ..., g_m$ が与えられたとする. I の素イデアルを $\mathfrak{p}$ で表す. まず, 一階の偏微分作用素

$$P = b_1(z)\frac{\partial}{\partial z_1} + b_2(z)\frac{\partial}{\partial z_2} + \cdots b_n(z)\frac{\partial}{\partial z_n} + d(z)$$

が Noether 作用素となる条件について考える. いま, $P(g_i) \in \mathfrak{p}, i = 1, 2, ..., m$ が成り立つとする. この時, Leibniz 則より, $d(z)$ の如何に関わらず $P(I) \subset \mathfrak{p}$ が従う. 従って, syzygy の計算を行うことで一階の Noether 作用素が構成できることが直ちに分かる.

例 2 $I = \langle y^2, z^2, y - xz\rangle \subset \mathbb{C}[x, y, z]$ は, $\mathbb{C}[x] \cap I = 0$ をみたす. I の一階の Noether 作用素としては $S = b_2\frac{\partial}{\partial y} + b_3\frac{\partial}{\partial z}$ なる形のものを考えれば十分である (Björk [1]).

$S(y^2) = 2by, S(z^2) = 2cz$ である. $\mathfrak{p} = \langle y, z\rangle$ であることから, $S(y^2), S(z^2) \in \mathfrak{p}$ は常に成り立つことがわかる. 次に条件 $S(y - xz) \in \mathfrak{p}$ を考える. $S(y - xz) = b_2 - xb_3$ であるので, Noether 作用素 S の係数多項式 b_2, b_3 は, $b_2 - xb_3 + e_2y + e_3z = 0$ を満たす $(1, -x, y, z)$ の syzygies として求めることできる. 実際に syzygy 計算を行うと (b_2, b_3, e_2, e_3) として $(x, 1, 0, 0), (-y, 0, 1, 0), (-z, 0, 0, 1)$ を得る. 偏微分作用素 $y\frac{\partial}{\partial y}, z\frac{\partial}{\partial y}$ は Noether 作用素としては自明なので, 非自明な Noether 作用素として $S = x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$ をえる.

さて, 話を一般の場合に戻し, 準素イデアル $I = \langle g_1, g_2, ..., g_m\rangle \subset \mathbb{C}[z_1, z_2, ..., z_n]$ の高階の Noether 作用素の構成法について考える. 以下, 偏微分作用素 P に対し, $P(I) \subset \mathfrak{p}$ なる条件を NT で表すことにする. さて, $h \in \mathbb{C}[z_1, z_2, ..., z_n], g \in I$ とし, 偏微分作用素 P を hg に施す. h を零階の偏微分作用素とみなし, 交換子積 $[P, h]$ を用いて $P(hg)$ を $P(hg) = [P, h]g + hP(g)g$ と変形する. この事から, P が条件 NT を満たすことは, $P(g_i) \in \mathfrak{p}, i = 1, 2, ..., m$ かつ すべての $h \in \mathbb{C}[z_1, z_2, ..., z_n]$ に対し $[P, h]$ が条件 NT を満たすことと同値であることが分かる. 更に, 次が成り立つことが示せる.

命題 (cf. Hörmander [6]) 偏微分作用素 P は次の条件を満たすとする.

(i) $P(g_i) \in \mathfrak{p},\ i = 1, 2, ..., m.$

(ii) $[P, x_i], i = 1, 2, ..., n$ は条件 NT を満たす.

このとき, P は条件 NT を満たす.

例 3 $I = \langle y^3, z^3, y - x^2z\rangle$ とする.

$\mathfrak{p} = \langle y, z\rangle$ である. 先ほどと同様の計算を行うことで, Noether 作用素として次を得る.

$$1, S = x^2\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

次に, 2 階の Noether 作用素を求めるため $T = a_{2,0}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{1,1}\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} + a_{0,2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + b_2\frac{\partial}{\partial y} + b_3\frac{\partial}{\partial z}$ とおく.

$T(y^3) \in \mathfrak{p}$, $T(z^3) \in \mathfrak{p}$ は係数の如何に関わらず常に成り立つ. また, $T(y - x^2 z) = b_2 - x^2 b_3$ であるので, $T(y - x^2 z) \in \mathfrak{p}$ なる条件は T の 1 階部分のみに関する条件であり, しかもこの条件は 1 階の Noether 作用素 S を求めた際に用いた条件と同一であることに注意する.

交換子積 $[T, y], [T, z]$ はそれぞれ

$$[T, y] = 2a_{2,0}\frac{\partial}{\partial y} + a_{1,1}\frac{\partial}{\partial z} + b_2,\ [T, z] = a_{1,1}\frac{\partial}{\partial y} + 2a_{0,2}\frac{\partial}{\partial z} + b_3$$

で与えられる. $[T, y]$, $[T, z]$ が条件 NT をみたすことは,

$$2a_{2,0}\frac{\partial}{\partial y} + a_{1,1}\frac{\partial}{\partial z} = e_1 S,\ a_{1,1}\frac{\partial}{\partial y} + 2a_{0,2}\frac{\partial}{\partial z} = e_2 S$$

を満たす e_1, e_2 が存在することと言い換えることが出来る. 従って, T を求めるには

$$\begin{pmatrix} 2\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2\frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ S \end{pmatrix}$$

の syzygies を求めればよい. 数式処理システム Kan([12]) を用いて syzygy 計算を行うと $(a_{2,0}, a_{1,1}, a_{0,2}, e_1, e_2)$ として

$$(-x^2\frac{\partial}{\partial z}, -2\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y}, 2\frac{\partial}{\partial z}, 0),\ (-x^2\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}, 0, 0, 2\frac{\partial}{\partial y}, 0),\ (x^4, 2x^2, 1, -2x^2, -2)$$

を得る. $(a_{2,0}, a_{1,1}, a_{0,2}, e_1, e_2)$ は多項式の組と仮定しているので Noether 作用素として

$$T = x^4\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2x^2\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

をえる.

補足 $[T, y]$, $[T, z]$ に対する条件 NT は,

$$T(y(y - x^2 z)) = 2a_{2,0} - a_{1,1}x^2 + b_2(2y - x^2 z) - b_3 x^2 y \in \mathfrak{p}, \tag{1}$$

$$T(z(y - x^2 z)) = a_{1,1} - 2a_{0,2}x^2 + b_2 z - 2b_3 x^2 z \in \mathfrak{p} \tag{2}$$

と書き換えることができる. この条件と

$$T(y - x^2 z) = a_{1,0} - a_{0,1}x^2 \in \mathfrak{p} \tag{3}$$

をまとめて, 整理することで

$$\begin{aligned} &2a_{2,0} - x^2 a_{1,1} \in \mathfrak{p}, \\ &a_{1,1} - x^2 a_{0,2} \in \mathfrak{p}, \\ &b_2 - x^2 b_3 \in \mathfrak{p} \end{aligned}$$

をえる. これらの条件は,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x^2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

を用いて

$$a_{2,0}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+a_{1,1}\begin{pmatrix}-x^2\\1\\0\end{pmatrix}+a_{0,2}\begin{pmatrix}0\\-x^2\\0\end{pmatrix}+b_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+b_3\begin{pmatrix}0\\0\\-x^2\end{pmatrix}$$

$$+e_{1,1}\begin{pmatrix}y\\0\\0\end{pmatrix}+e_{1,2}\begin{pmatrix}z\\0\\0\end{pmatrix}+e_{2,1}\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}+e_{2,2}\begin{pmatrix}0\\z\\0\end{pmatrix}+e_{3,1}\begin{pmatrix}0\\0\\y\end{pmatrix}+e_{3,2}\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

と表すことができる.

よって, syzygies $a_{2,0},a_{1,1},a_{0,2},b_2,b_3,e_{1,1},e_{1,2},e_{2,1},e_{2,2},e_{3,1},e_{3,2}$ を計算することにより $a_{2,0}$, $a_{1,1}$, $a_{0,2}$, b_2, b_3 を求めることができる.

例 4 $I=\langle y^2,z^3,y-xz^2\rangle$ とする. イデアル I のグレブナ基底として $\{zy,y^2,z^3,y-xz^2\}$ をえる. 素イデアルは $\mathfrak{p}=\langle y,z\rangle$ である. 一階の偏微分作用素 $S=b_2\frac{\partial}{\partial y}+b_3\frac{\partial}{\partial z}$ を考える. $S(y-xz^2)=b_2-2xzb_3$ より Noether 作用素となる条件として $b_2\in\mathfrak{p}$ を得る. これより,

$$S=\frac{\partial}{\partial z}$$

をえる. 次に 2 階の Noether 作用素を考える

$T=a_{2,0}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_{1,1}\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}+a_{0,2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+b_2\frac{\partial}{\partial y}+b_3\frac{\partial}{\partial z}$ とおく. $[T,y],[T,z]$ が条件 NT を満たすことから, $a_{2,0}\in\mathfrak{p}$, $a_{1,1}\in\mathfrak{p}$ をえる. よって,

$$T=a_{0,2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+b_2\frac{\partial}{\partial y}+b_3\frac{\partial}{\partial z}$$

とおきなおす. ここで $T(y-xz^2)=-2xa_{0,2}+b_2\in\mathfrak{p}$ より,

$$T=\frac{\partial^2}{\partial z^2}+2x\frac{\partial}{\partial y}$$

をえる.

3 代数的局所コホモロジー

1999 年に開かれた研究集会の折にも述べたように Noether 作用素は代数的局所コホモロジーと密接な関係がある ([10]). この節では, 両者の関係を前節で与えた例 2,3 の場合に具体的に記しておくことにする.

例 2 $V(I)=\{(x,y,z)\in\mathbf{C}^3\mid y=z=0\}$ に台を持つ代数的局所コホモロジー類 $\delta=[\frac{1}{yz}]$ をとる. Noether 作用素 $S=x\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}$ の形式随伴作用素 S^* を δ に施すことで, 代数的局所コホモロジー類

$$\sigma=S^*\delta=[\frac{x}{y^2z}]+[\frac{1}{yz^2}]$$

を得る. この代数的局所コホモロジー類 σ は

$$y^2\sigma=z^2\sigma=(y-xz)\sigma=0$$

を満たす.

前節で述べたように syzygy 計算を行うと, 条件 NT を満たす作用素として, $y\frac{\partial}{\partial y}, z\frac{\partial}{\partial z}$ も得る. これらの作用素は Noether 作用素としては自明なものであったがここでこれらの作用素の形式随伴作用素を δ に施してみると, δ は annihilate されてしまい 0 となる事が確かめられる. また, 偏微分作用素 $\frac{\partial}{\partial x}$ も条件 NT を満たすが, 先ほどと同様に, $\frac{\partial}{\partial x}$ の形式随伴作用素を δ に施すと 0 となる.

例 3 前節で求めた Noether 作用素 S, T を $\delta = [\frac{1}{yz}]$ に施すと,

$$(-\frac{\partial}{\partial y}x^2 - \frac{\partial}{\partial z})[\frac{1}{yz}] = [\frac{x^2}{y^2z}] + [\frac{1}{yz^2}],$$

$$(-\frac{\partial^2}{\partial y^2}x^4 + 2\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}x^2\frac{\partial^2}{\partial z^2})[\frac{1}{yz}] = 2([\frac{x^4}{y^3z}] + [\frac{x^2}{y^2z^2}] + [\frac{1}{yz^3}])$$

をえる. ここで

$$\sigma = [\frac{x^2}{y^2z}] + [\frac{1}{yz^2}], \ \tau = [\frac{x^4}{y^3z}] + [\frac{x^2}{y^2z^2}] + [\frac{1}{yz^3}]$$

とおくと, 両者ともに

$$y^3\sigma = z^3\sigma = (y - x^2z)\sigma = 0, \ y^3\tau = z^3\tau = (y - x^2z)\tau = 0$$

を満たすことが容易に確かめられる.

[1] J-E. Björk, *Rings of Differential Operators*, North-Holland, 1979.

[2] L. Ehrenpreis, *Fourier Analysis in Several Complex Variables*, Wiley-Interscience, 1970.

[3] J. Emsalem, Géométrie des points épais, Bull. Soc. math. France 106 (1978), 399-416.

[4] W. Gröbner, Il concetto di molteplicita' nella geometria algebrica, Rend. Sem. Mat. Fiz. Milano 40 (1970) 93–100.

[5] W. Gröbner, *Algebraisch Geometrie II, Hochschultaschenbücher*, 1970.

[6] L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, North-Holland, the third revised edition, 1990.

[7] U. Oberst, The construction of Noetherian Operators, J. of Algebra **222** (1999), 595–620.

[8] B. P. Palamadov, A remark on the exponential representation of solutions of differential equations with constant coefficients, Mat. Sbornik 76(118) (1968), 417–434.

[9] B. P. Palamodov, *Linear Differential Operators with Constant Coefficients,* Grundl. d. Math. Wiss. Springer-Verlag, 1970.

[10] 田島慎一, Holonomic な定数係数線形偏微分方程式系と Grothendieck duality, 京都大学数理解析研究所講究録 1509 (2006), 1–23.

[11] S. Tajima, On Noether differential operators attached to a zero-dimensional primary ideal –shape basis case–, Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, Kyushu University Press (2005), 357–366.

[12] N. Takayama, Kan: a system for computation in Algebraic Analysis. (1991–), http://www.math.s,kobe-u.ac.jp.

[13] D. Zeilberger, A new proof to Ehrenpreis's semilocal quotient structure theorem, Amer. J. of Math. 100(6) (1978), 1317–1332.